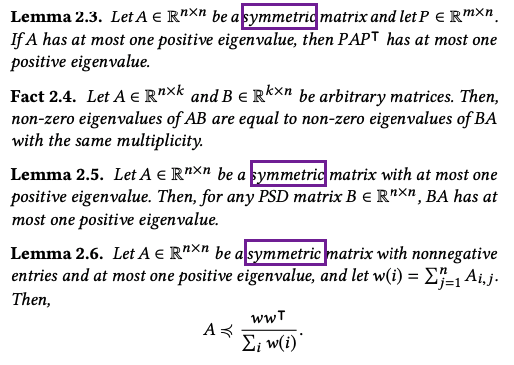
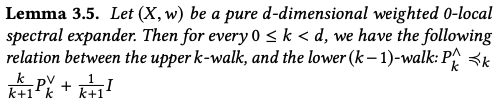
Log-concave Polynomials II中比较有意思的一点就是, 他们有很多关于矩阵特征值的证明, 这些证明往往直接证明不太好证, 于是他们就通过自行构造inner product构造一个容易相关的矩阵, 在相关的矩阵上证明了结论之后, 通过inner product的一些性质, 将结论搬到目标矩阵上.

# Example1

比如, 他们整了很多好用的和特征值相关的性质, 但是都只能在对称矩阵上能用.



然而他们研究的矩阵一般都不是对称的. 这个时候他们会构造一个inner product, 将他们研究的矩阵和一个对称阵联系起来.



这里比较有意思的一点就是, 直接证明,

可能不太好证明. 因为最后会转化为证明:

这里, 不是一个对称矩阵, 所以上面的性质在上无法直接使用. 所以这个东西不容易直接证明出来.

于是, 这里他们构造了一个inner product . 使得:

这样就有:

**

也就是说: , 这里

因为是对称矩阵, 所以B也是对称矩阵. 通过上面给出的对称矩阵的性质可以说明这里B是半负定的, 所以关于是半负定的. 所以, 实际上:

是比较容易证明的, 因为这样我们只需要证明B负定, 而B是对称矩阵, 所以有很多性质可以用上来. 最后就证明了

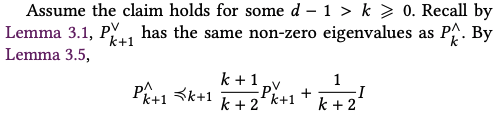
这里, 都是关于的self-adjoint operator. 他们的特征向量都可以做出一组中的基(单位, 并且关于). 我们可以利用这三组基来研究特征值之间的关系.

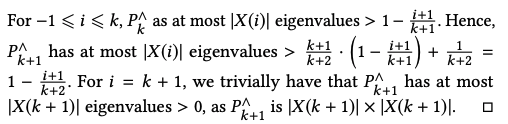
比如他们后面就通过归纳法, 假设最多有个特征值. 因为 和有相同的非0特征值, 所以最多有个特征值.

因为的特征向量构成的一组基, 所以, 我们只能有一个大小最多为维的子空间中的向量能够满足, , 其实也就是, 只有中的向量满足.

又因为的特征向量在中构成一组基, 而我们前面知道中只有一个大小最多为维的子空间中的向量能够使得, 所以我们可以由[Courant-Fischer Theorem]推出最多有个特征值.

这里最麻烦的一点是: 如果不是是关于的self-adjoint operator, 那么[Courant-Fischer Theorem]将不能使用, 这里这一步就过不来. 我这里花了很多时间思考这一步是怎么推过来的. 他们文章里面写得太简略了.

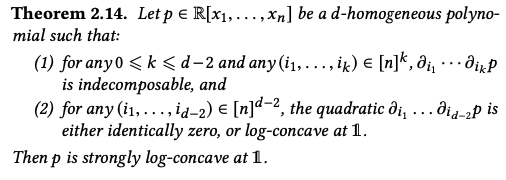
**

**

总的来说, 因为这里都是关于的self-adjoint operator, 所以[Courant-Fischer Theorem]可用, 所以我们可以通过上的Loewner order来在的特征值上建立起精确的联系. 而这里, 如果直接使用普通内积的话, 很难证明同样的Loewner order, 因为相关的矩阵不是对称矩阵.

# Example2

还有一处很重要的证明也用到了类似的技巧.

**

这里, 要证明最多只有一个正特征值. 这里直接证明也不太容易. 所以他们还是构造了一个inner product:

**

然后就有:

**

这里是中, 每一行单位化(每一行的和为1)之后的矩阵, 而且还是的self-adjoint operator. 所以和前面一样, 如果只有一个正特征值, (因为self-adjoint operator)则只在一个一维子空间中取正值, 则也最多只在一个一维子空间中取正值, 所以由[Courant-Fischer Theorem], 也最多只有一个正特征值.

于是他们在之后的证明中就只需要证明最多有一个正特征值. 显然, 天生有一个1特征值对应全1特征向量. 这就相当于给了一些更强的条件, 就让这个问题变得好证明了. 他们最后刚好就利用了这个条件, 证明了的所有特征值都有:. 在结合连通图的expansion > 0, 于是对应的spectral gap > 0, 所以把上面所有条件结合起来, 就得到了最多只有一个正特征向量.